

NGÔ LONG HẬU  
MAI TRƯỜNG GIÁO - HOÀNG NGỌC ANH

# 500 BÀI TOÁN

## CHỌN LỌC

lớp

12

Lập bảng biến thiên



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

**NGÔ LONG HẬU  
HOÀNG NGỌC ANH - MAI TRƯỜNG GIÁO**

**500**

**BÀI TOÁN CHỌN LỌC**

*LỚP* **12**

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

## PHẦN I. ĐỀ BÀI

### A. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

#### I. QUAN HỆ GIỮA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

1. Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số sau:

a.  $y = 2x^3 - 6x + 5$

b.  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 3x + 1$

c.  $y = \frac{x+1}{x-1}$

d.  $y = \frac{-3x^2 + 2x - 5}{x+1}$

2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a.  $y = \frac{3x+1}{1-x}$

b.  $y = \frac{x}{x^2+4}$

3. Chứng minh rằng hàm số  $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x+1}$  đồng biến trên các khoảng  $(-(1+\sqrt{2}); -1)$ ;  $(-1; \sqrt{2}-1)$  và nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -(1+\sqrt{2}))$ ,  $(\sqrt{2}-1; +\infty)$ .

4. Cho hàm số:  $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 + 2)}{x-m}$  (1)

Xác định tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số (1) nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

5. Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + 2}{x+1}$  (1)

Với giá trị nào của  $m$  thì hàm số (1) đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

6. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 + (2m-1)x + m}{x+1}$

Xác định  $m$  sao cho hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$

7. Xét chiều biến thiên của hàm số:  $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

8. Lập bảng biến thiên của hàm số:  $y = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^2}{2} + a$  với  $a$  là tham số,  $n \in \mathbb{N}$

9. Xét chiều biến thiên của hàm số:  $y = x + |x^2 - 2x + m|$ ,  $m$  là tham số

10. Tìm  $m$  để hàm số:  $y = -x - \sqrt{x^2 - x + m}$  luôn nghịch biến với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$

11. Chứng minh rằng hàm số  $y = 5x - 3\sin x + 4\cos x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

12. Với  $x > 0$ . Chứng minh rằng  $e^x > 1 + x$

#### II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

13. Xác định các điểm cực trị và các giá trị cực đại, cực tiểu của các hàm số

a.  $y = \frac{x^2 + 2}{x}$  ;

b.  $y = x^2 e^{-x}$

c.  $y = x^2 \sqrt{x^2 + 2}$  ;

d.  $y = x + \ln(x+1)$

**14.** Với giá trị nào của m thì hàm số  $f(x) = \sin 3x + m \sin x$  cực trị tại điểm  $x = \frac{\pi}{3}$ ? Điểm  $\frac{\pi}{3}$  là điểm cực đại hay điểm cực tiểu.

**15.** Cho hàm số  $y = mx^3 - mx^2 + 1$ , trong đó m là tham số có thể lấy mọi giá trị thực.

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm  $x = \frac{2}{3}$ . Cực trị này là điểm cực đại hay cực tiểu.

Hàm số còn có điểm cực trị nào khác không?

**16.** Tìm điểm cực trị (nếu có) của mỗi hàm số sau:

$$a. y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$$

$$b. y = x + \frac{a}{x} \quad (a \text{ là tham số})$$

**17.** Tìm m và n để các giá trị cực trị của hàm số:  $y = \frac{5}{3}m^2x^3 + 2mx^2 - 9x + n$

Đều là các số dương và  $x_0 = -\frac{5}{9}$  là điểm cực đại.

**18.** Cho hàm số:  $y = x^3 - 3mx^2 + 4$  (1), m là tham số.

Chứng minh rằng hàm số (1) có cực trị với mọi  $m \neq 0$ .

**19.** Cho hàm số:  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa mãn  $|x_{CD} + x_{CT}| = 2$

**20.** Cho hàm số:  $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$  (1)

m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

**21.** Tìm quỹ tích các điểm cực đại của hàm số  $y = x^3 - mx^2 + 1$  (m là tham số  $m < 0$ ) khi m thay đổi.

**22.** Cho hàm số:  $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$  (1)

m là tham số. Xác định m để đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng  $y = x$

**23.** Cho hàm số  $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$  có đồ thị ( $C_m$ )

Xác định tất cả các giá trị của m để ( $C_m$ ) có điểm cực đại và điểm cực tiểu ở về hai phía của trục tung.

**24.** Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - x + m}{x - 1}$

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

**25.** Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 - 1}{x - m}$  (1)

m là tham số. Xác định m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu và  $x_{CT} < 2$ .

**26.** Tìm k để hàm số  $y = -2x + k\sqrt{x^2 + 1}$  có cực tiểu.

**27.** Cho hàm số:  $y = x^3 - x^2 - 7x + 1$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm CD, CT của đồ thị hàm số.

**28.** Cho hàm số:  $y = x^4 - 4x^3 + 8x$ . Chứng minh rằng đường thẳng nối hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số song song với trục hoành.

### III. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

29. Với mỗi hàm số sau đây hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) trên đoạn hay khoảng tương ứng.
- a.  $y = 5x^2 - 5x + 1, x \in [-1; 1]$       b.  $y = \sin x - \cos x, x \in \mathbb{R}$   
 c.  $y = x + \frac{1}{x}, x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$       d.  $y = 2x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

30. Cho trước chu vi hình chữ nhật  $p = 16\text{cm}$ . Dựng hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

31. Một hình chữ nhật có một cạnh nằm trên cạnh huyền của tam giác vuông với hai cạnh góc vuông là  $c, b$ . Hai đỉnh của hình chữ nhật nằm trên hai cạnh góc vuông của tam giác.  
Hãy xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

32. Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích  $48\text{cm}^2$ . Hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

33. Phân tích số 14 thành tổng hai số sao cho tổng các bình phong của chúng là nhỏ nhất.

34. Cho  $x, y$  là hai số không âm thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:  $P = x^3 + y^3$

35. Cho  $x, y$  là hai số không âm thỏa mãn  $x + y = 2$

Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức  $P = 4^x + 2^y$ .

36. Cho ta số thực  $a, b, c \in [0; 1]$ . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a+b}{c+1} + \frac{b+c}{a+1} + \frac{c+a}{b+1}.$$

37. Một nhà máy cần sản xuất một bể nước bằng tôn có dạng hình hộp đứng đáy là hình vuông, không nắp có thể tích  $4\text{m}^3$ . Hãy tính kích thước của bể sao cho tốn ít vật liệu nhất.

38. Cho  $x, y$  là số thay đổi và thỏa mãn điều kiện  $x^2 + xy + y^3 = 3$ . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:  $P = x + y$ .

39. Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình:  $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$

Với giá trị nào của  $m$  thì biểu thức  $B = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$  đạt GTLN.

40. Tìm GTNN và GTLN (nếu có) của hàm số  $y = x^2 - 2x + \frac{2}{x-1}$ , với  $x \in (1; +\infty)$

41. Tìm GTNN và GTLN của hàm số  $y = x^6 + 4(1-x^2)^3$  trên đoạn  $[-1; 1]$

42. Tìm GTNN và GTLN của hàm số  $y = x\sqrt{1-x^2}$

43. Tìm GTNN của hàm số  $y = \sin^3 x + \sqrt{3} \cos x$  trên đoạn  $[0; \pi]$

44. Tìm GTNN của hàm số  $y = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} + 1$

45. Tìm GTNN và GTLN của hàm số  $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$

46. Tìm GTNN và GTLN của hàm số  $y = \sin x + 3 \sin 2x$

### IV. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

47. Tìm tệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị của mỗi hàm số sau đây:

a.  $y = \frac{3x}{2+x}$       b.  $y = \frac{2-x}{x^2}$       c.  $y = \frac{x^2 - x - 1}{7 - 2x - 5x^2}$

48. Tìm tệm cận xiên của đồ thị hàm số:  $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$

49. Tìm các tiệm cận của đồ thị của mỗi hàm số sau:

$$a. y = \frac{-x+7}{-x-1} \quad b. y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x+3} \quad c. y = 3x + 1 - \frac{3}{2x+3}$$

50. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 + mx + m - 2}{x-1}$ .  $m$  là tham số

Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số có tiệm cận xiên đi qua điểm  $M(2;1)$

51. Cho hàm số:  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  có đồ thị (C)

Tìm các điểm M trên (C) có tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận của (C) bằng 4.

52. Cho hàm số:  $y = \frac{x+1}{x-2}$  có đồ thị (C). Tìm các điểm trên đồ thị (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

53. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 + 4x - 4}{x-1}$  có đồ thị (C), cho  $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ . Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ  $M_0$  đến 2 đường tiệm cận của (C) là một hằng số.

54. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x-1}$  có đồ thị (C). Với giá trị nào của  $m$  thì tiệm cận xiên của (C) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4 (đvdt)

55. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị  $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

56. Cho hàm số  $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 - 2)}{x-m}$

Với  $m$  là tham số và  $m \neq 1$ . Xác định tiệm cận xiên của đồ thị. Chứng tỏ rằng tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

## V. ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ – PHÉP TÍNH BIẾN HỆ TỌA ĐỘ

57. a. Xác định điểm uốn I của đồ thị (C) của hàm số:  $y = x^3 - 6x + 1$

b. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{OI}$  và viết phương trình của đường cong (C) trong hệ IXY từ đó suy ra tâm đối xứng I của (C).

58. Chứng minh rằng đồ thị hàm số:  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Có 3 điểm uốn và 3 điểm uốn nằm trên cùng một đường thẳng.

59. Xác định  $a, b$  để điểm  $(1; 3)$  là điểm uốn của đường cong  $y = ax^3 + bx^2$ . Đường cong còn điểm uốn nào khác chăng?

60. a. Chứng minh rằng đồ thị (C) của hàm số  $y = 3x^2 - x^3$  nhận I(1; 2) làm điểm uốn.

b. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{OI}$  và viết phương trình của đường cong (C) trong hệ tọa độ IXY từ đó suy ra tâm đối xứng I của (C).

61. a. Tóm  $a, b$  để đồ thị (C) của hàm số  $y = x^3 - ax^2 + x + b$  nhận điểm I(1; 1) làm điểm uốn.

b. Với  $a, b$  vừa tìm được viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{OI}$  và viết phương trình của đường cong (C) trong hệ tọa độ IXY.

62. Tìm  $a$  để đồ thị hàm số:  $y = x^4 - ax^2 + 3$

a. Có 2 điểm uốn

b. Không có điểm uốn.

**63.** Xác định giao điểm I của hai đường tiệm cận của mỗi hàm số sau. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo véc tơ  $O\vec{I}$  và viết phương trình của (H) đối với hệ tọa độ IXY.

$$a. y = \frac{2x+1}{x-1} \quad b. y = \frac{1-3x}{x+1} \quad c. y = \frac{x^2-2x+3}{x-1} \quad d. y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$$

**64.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ . Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng  $y = x + 1$

**65.** Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 1}$  có đồ thị ( $C_m$ )

Tìm các giá trị của m để ( $C_m$ ) có 3 điểm uốn.

**66.** Chứng minh rằng đồ thị hàm số:  $y = \frac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$  có tâm đối xứng  $T\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$

**67.** Chứng minh rằng đồ thị hàm số  $y = x^4 + 4x^3 + 8x$  có trục đối xứng  $x = 1$ . Từ đó xác định hoành độ giao điểm của đồ thị với đường thẳng  $y = 3$ .

## VI. KHẢO SÁT HÀM SỐ

**68.** Cho hàm số:  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$  (1)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

2. Tìm điều kiện của k để phương trình:  $x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = k$  có 3 nghiệm phân biệt.

**69.** Cho hàm số:  $y = f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 - 9x$  (1)

1. Với  $m = 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b. Cho A (-2; -2) tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua tâm đối xứng của đồ thị (C).

2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có các hoành độ tạo thành cấp số cộng.

**70.** Cho hàm số:  $y = x^4 - 2mx^2 + m^2(m-1)$  có đồ thị là ( $C_m$ )

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên với  $m = 1$

2. Xác định m để ( $C_m$ ) và trục hoành có 3 điểm chung.

**71.** Cho hàm số:  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  (1)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số khi tiếp tuyến đi qua điểm A (0; 2).

**72.** Cho hàm số:  $y = \frac{x+1}{x-1}$  (1) có đồ thị (C)

1. Khảo sát hàm số (1)

2. Gọi (d) là đường thẳng có phương trình  $2x - y + m = 0$

a. Chứng minh (d) luôn cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt.

b. Xác định m để độ dài AB nhỏ nhất.

3. Từ đồ thị (C) vừa vẽ suy ra đồ thị hàm số sau:  $y = \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

**73.1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:  $y = \frac{x+1}{x-2}$

2. Tìm các điểm trên (C) có tọa độ nguyên.

74. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$  (1)

1. Khảo sát hàm số (1)

2. Tìm các điểm trên đồ thị hàm số (1) mà tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó vuông góc với tiệm cận xiên.

75. Cho hàm số:  $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$  (1)

1. Khảo sát hàm số (1)

2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số (1) giả sử tiếp tuyến tại  $M \in (C)$  cắt hai tiệm cận tại P và Q. Chứng minh rằng  $MP = MQ$ .

76. Cho hàm số:  $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m}$  có đồ thị ( $C_m$ )

1. Khảo sát hàm số với  $m = 2$

2. Tìm  $m$  để tiệm cận xiên của đồ thị tiếp xúc với parabol:  $y = x^2 + 2x + 1$

## B. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LOGARIT

77. Rút gọn các biểu thức sau:

a.  $A = \frac{x+y}{\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^3}} + \frac{x-y}{\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^3} + \frac{2}{y^3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}$   $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{array} \right.$

b.  $B = \frac{(x+y)^2}{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 - y^2}{\left( x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \left( x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y \right)}$   $\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq y \end{array} \right.$

c.  $C = \left[ \frac{\left( a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}} \right) \left( a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab} \right] \times \frac{2\sqrt{2,5}(a+b)^{-1}}{\sqrt[3]{10}}$   $\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ a \neq b \end{array} \right.$

d.  $D = \left[ \left( a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \times (a-x) - \frac{a+x}{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}} \right] \times 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$   $\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ x > 0 \\ x \neq a \end{array} \right.$

78. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức sau: ( $a > 0; b > 0; a \neq b$ )

a.  $E = \frac{a-b}{\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2b^4}} - \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}}$  Khi:  $a = \frac{1}{16}; b = \frac{1}{81}$

b.  $K = \frac{x-4}{x+2\sqrt{x}-4} : \frac{x^{0.5}+2}{x^{1.5}-8}$

79. Cho  $\lg 2 = a, \lg 7 = b$ . Tính  $\lg 56$

80. Cho  $\log_{10} 3 = a; \log_{10} 5 = b$ . Tính  $\log_{10} 8$

81. Cho  $\log_{27} 5 = a; \log_8 7 = b$  và  $\log_3 2 = c$ . Tính  $\log_6 35$  theo a, b, c

82. Cho  $\log_2 3 = a$ ;  $\log_3 5 = b$  và  $\log_7 2 = c$ . Tính  $\log_{140} 63$  theo a, b, c  
 83. Chứng minh rằng:  $\lg 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \dots \log_{10} 9$ . Chú ý:  $\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3}$

84. Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a, b, c \neq 1$ . Chứng minh rằng:  $b^{\log_a c} = c^{\log_b a}$

85. Cho  $a, b > 0$ ;  $a, b \neq 1$ . Chứng minh rằng:  $(a)^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$

86.  $\begin{cases} \text{Cho } a, b > 0, a, b \neq 1 \\ ab \neq 1 \\ M > 0, M \neq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng:  $\log_a M = \log_{ab} M (1 + \log_a b)$

87.  $\begin{cases} \text{Cho } a > 0, k > 0, ak \neq 1 \\ N > 0; N \neq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng:  $\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1 + \log_a k$

88. Cho  $a, b > 0$ ;  $a, b \neq 1$  và  $(a+b)^2 = 9ab$ . Chứng minh rằng:  $\log_5 \left( \frac{a+b}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log_5 a + \log_5 b)$

89. Cho  $N > 0$ ;  $N \neq 1$ ,

Chứng minh rằng:  $\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \dots + \frac{1}{\log_{2008} N} = \frac{1}{\log_{(2,3,4\dots 2008)} N}$

90. Chứng minh rằng:

Nếu  $a, b > 0$ ,  $ab \neq 1$ ,  $M > 0$ ,  $M \neq 1$  thì  $\log_{ab} M = \frac{\log_a M \cdot \log_b M}{\log_a M + \log_b M}$

91. Cho  $m, n, k > 0$  và  $m, n, k \neq 1$ ,  $A > 0$  và  $A \neq 1$

Chứng minh rằng nếu  $\log_k A, \log_m A, \log_n A$  lập nên cấp số cộng thì ta có:  $n^2 = (kn)^{\log_k m}$

92. Cho  $n, p > 0$ ;  $n, p \neq 1$ ,  $np \neq 1$

Rút gọn biểu thức sau:  $A = \sqrt{\log_n p + \log_p n + 2 \times (\log_n p - \log_{np} p) \times \sqrt{\log_n p}}$

93. Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a, b, c \neq 1$  và  $M > 0$ ,  $M \neq 1$

Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  lập nên cấp số nhân thì:

$$\frac{\log_a M - \log_b M}{\log_b M - \log_c M} = \frac{\log_a M}{\log_c M}$$

94. Chứng minh rằng:  $2 < \sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2} < \sqrt{2} + 1$

95. Cho  $x > 0$  và cho  $\ln 2$ ;  $\ln(2^x - 1)$ ;  $\ln(2^x + 3)$ , lập nên cấp số cộng. Tìm x.

96. Rút gọn các biểu thức sau:

- a. Cho  $a > 0$ ;  $a \neq 1$ ;  $N > 0$ ;  $N \neq 1$ ;  $\log_a N > 0$  và  $\log_a N \neq 1$

$$A = \frac{\log_a (\log_a N)^2}{\log_a (\log_a N)}$$

- b. Cho  $N > 0$ ;  $N \neq 1$ ,  $\log_{10} N > 0$ ;  $\log_{10} N \neq 1$

$$B = \frac{\log_{10} (\log_{10} N^{10})}{1 + \log_{10} (\log_{10} N)}$$

Giải các phương trình sau:

97. a.  $6^{1-x} = 216$

b.  $3^{(x-2)(3-x)} = 1$

c.  $7^{x^2-5x+9} = 343$

98. a.  $2^{x+2} - 2^x = 96$

b.  $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

c.  $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-4} = 13$

99. a.  $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$

b.  $\left(\frac{3}{5}\right)^x \times \left(2\frac{7}{9}\right)^x = 1$

c.  $\sqrt[3]{0,8^{2x+2}} = \sqrt[3]{(1,25)^{6x-12}}$

Giải các phương trình sau:

100. a.  $7^x - 7^{x-1} = 6$

b.  $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$

101. a.  $7^{x+2} + 2 \cdot 7^{x-1} = 345$

b.  $5^{x+1} + 5^x = 150$

c.  $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$

Giải các phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn số phụ

102. a.  $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

b.  $4^x + 2^{x+1} = 80$

c.  $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0$

d.  $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

103. a.  $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

b.  $2^{2x+6} + 2^{x+7} = 17$

c.  $5^x - (0,2)^x = 4$

104. a.  $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 = 0$

b.  $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$

c.  $4^x + 6^x = 9^x$

Giải các phương trình sau:

105. a.  $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$  b.  $3^x + 4^x = 5^x$

106. a.  $5^x + 12^x = 13^x$

b.  $8^x + 15^x = 17^x$

c.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

Giải các phương trình sau:

107. a.  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$  b.  $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$

c.  $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$

d.  $\left(\sqrt[5]{7+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 14$

108. a.  $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$

b.  $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$

c.  $3^{1-x} + 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$

109. a.  $(3^{2x} + 3^{-2x} - 2) + 3(3^{-x} - 3^x) - 4 = 0$

b.  $\frac{1+3^x}{1-3^x} + \frac{1-3^x}{1+3^x} = \frac{10 \cdot 9^x}{1-9^x}$

c.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x}$

110. a.  $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10$

b.  $27^x + 2 = \sqrt[3]{3^{x+1} - 2}$

Giải và biện luận phương trình (m là tham số)

111. a.  $(3+\sqrt{5})^x + m((3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$

b. Tìm m (m là tham số) để phương trình:  $m \cdot 2^x + 2^{-x} + 4 = 0$  (1) có nghiệm duy nhất

Giải các phương trình sau:

112. a.  $8^{x-3} = 9^{x-3}$

b.  $(0,1)^{-(x^2-5x+8)} = 100$

c.  $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$

113. a.  $25^x - 2(3-x) \cdot 5^x + 2x - 7 = 0$  b.  $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\cos x} + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{\cos x} = 4$

c.  $3 \cdot 16^{x-2} + (3x-10) \cdot 4^{x-2} + 3 - x = 0$